**Nota de Aula 01: Derivação do modelo de Lewis (Ros, 2013)**

Hipóteses:

- ✓ Dois setores: S (subsistência) e M (moderno ou capitalista).
- ✓ No setor S os trabalhadores recebem como remuneração o produto médio do trabalho
- ✓ O setor S produz o mesmo produto que o setor M, porém com uma quantidade negligenciável de capital.
- ✓ As funções de produção dos setores S e M são dadas por:

$$M = AK^{\alpha}(L_M)^{1-\alpha} \qquad (1)$$

$$S = \overline{w}_s L_s \qquad (2)$$

- ✓ Os mercados de trabalho são competitivos no sentido de que o salário do setor capitalista tem que pagar é determinado pelo que as pessoas podem ganhar fora do setor.
- ✓ Seja $f$ >1 o prêmio salarial.
- ✓ Temos que: $w_M = f\overline{w}_s$ (3)
- ✓ O emprego no setor capitalista é determinado pela maximização de lucro
- ✓ Temos:

$$\pi = p_m AK^{\alpha}(L_M)^{1-\alpha} - \ w_M L_M \ (4)$$

- ✓ Assumindo que $p_m = 1$ temos:

$$MAX\ \pi = p_m AK^{\alpha}(L_M)^{1-\alpha} - \ w_M L_M$$

- ✓ Derivando com respeito a $(L_M)$ e igualando a zero temos:

$$(1-\alpha)AL_M^{-\alpha}K^{\alpha} - w_M = 0$$

- ✓ Resolvendo para $L_M$, temos:

$$L_M^* = \left[\frac{A(1-\alpha)}{w_M}\right]^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} K \qquad (5)$$

- ✓ Não existe desemprego aberto no sentido de que quem não trabalha no setor capitalista irá trabalhar no setor não capitalista (desemprego disfarçado?)

- ✓ O desemprego Keynesiano pode ser eliminado pelo aumento da demanda efetiva: isso leva ao aumento do nível de preços e a uma redução do salário real, aumentando assim a demanda de trabalho.
- ✓ No modelo de Lewis isso não funciona: se o aumento da demanda efetiva reduzir o salário real no setor capitalista então os trabalhadores irão migrar para o setor de subsistência impedindo assim a queda do salário real.
- ✓ A única forma de reduzir o excedente de mão-de-obra é expandir, não a demanda efetiva, mas o estoque de capital.
- ✓ O modelo de Lewis assume rigidez de salário real, ao passo que o modelo Keynesiano assume rigidez de salário nominal.
- ✓ Já no modelo da economia política clássica o setor capitalista se defronta com uma curva de oferta de trabalho perfeitamente elástica ao nível de salário de subsistência.
    - o No modelo clássico não existe um setor de subsistência
    - o A oferta de trabalho é elástica devido ao mecanismo Malthusiano de crescimento populacional.

$$\hat{L} = f\ (w - w_s) \quad (7)$$

- ✓ O modelo clássico não possui um setor de subsistência, mas uma oferta endógena de trabalho.

**Equilíbrio de Curto-Prazo e Acumulação de Capital**

- ✓ Enquanto os dos setores coexistirem o salário de equilíbrio do setor capitalista $w_m$ será dado por $f w_s$. Nesse caso, o aumento da relação K/L irá ocorrer apenas por um aumento de $L_M$ mantendo $w_m$ constante (observação: a relação K/L no setor capitalista continuará constante até a economia atingir o ponto de Lewis, ou seja, até que toda a mão-de-obra do setor de subsistência seja transferido para o setor capitalista).

- ✓ Sabemos que a produtividade marginal do trabalho em pleno-emprego é dada por:

$$(1-\alpha)A\,\tilde{k}^{\alpha} \quad onde\ \tilde{k} = \frac{K}{L}$$

- ✓ Ponto de Lewis: $(1-\alpha)A\,\tilde{k}^{\alpha} = \ fw_s$

$$\tilde{k} = \left[\frac{fw_s}{(1-\alpha)A}\right]^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \quad (8)$$

- ✓ Vamos assumir que os trabalhadores no setor capitalista e no setor de subsistência consomem toda a sua renda.

$$S = s_p P$$

- ✓ Defina-se:

$$\sigma = \frac{S}{K} = s_p\frac{P}{K} = s_p r \ \ (9)$$

$$Onde\!: r \text{ é } a\ taxa\ de\ lucro\ sobre\ o\ capital$$

$$\frac{\Delta K}{K} = g = \frac{I - \delta K}{K} = \frac{I}{K} - \delta \ \ (10)$$

$$g = s_p r - \delta \quad (11)$$

- ✓ Abstraindo o progresso técnico, a taxa natural de crescimento (ou seja, aquela que é compatível com uma taxa de emprego constante ao longo do tempo) é igual a taxa de crescimento da força de trabalho, a qual iremos considerar exógena e constante dada por $n$.
- ✓ Ao longo da trajetória de crescimento balanceado o estoque de capital tem que crescer a mesma taxa que a força de trabalho (definição de crescimento balanceado). Temos que:

$$s_p r - \delta \ \ = n \quad (12)$$

- ✓ A taxa de lucro é determinada pela produtividade marginal do capital, ou seja:

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$

$$r = \frac{\alpha A K^{\alpha} L^{1-\alpha}}{K} = \alpha\frac{Y}{K} \quad (13)$$

- ✓ Mas:

$$r = \alpha\frac{(\frac{Y}{L})}{(\frac{K}{L})} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} \quad (13a)$$

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = A\tilde{k}^{\alpha}$$

- ✓ Logo:

$$r = \alpha A\tilde{k}^{\alpha-1} \qquad (14)$$

✓ Substituindo (8) em (14), temos:

$$r = \alpha A \left\{ \left[ \frac{w_M}{(1-\alpha)A} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\alpha - 1}$$

✓ Rearrumando a expressão temos:

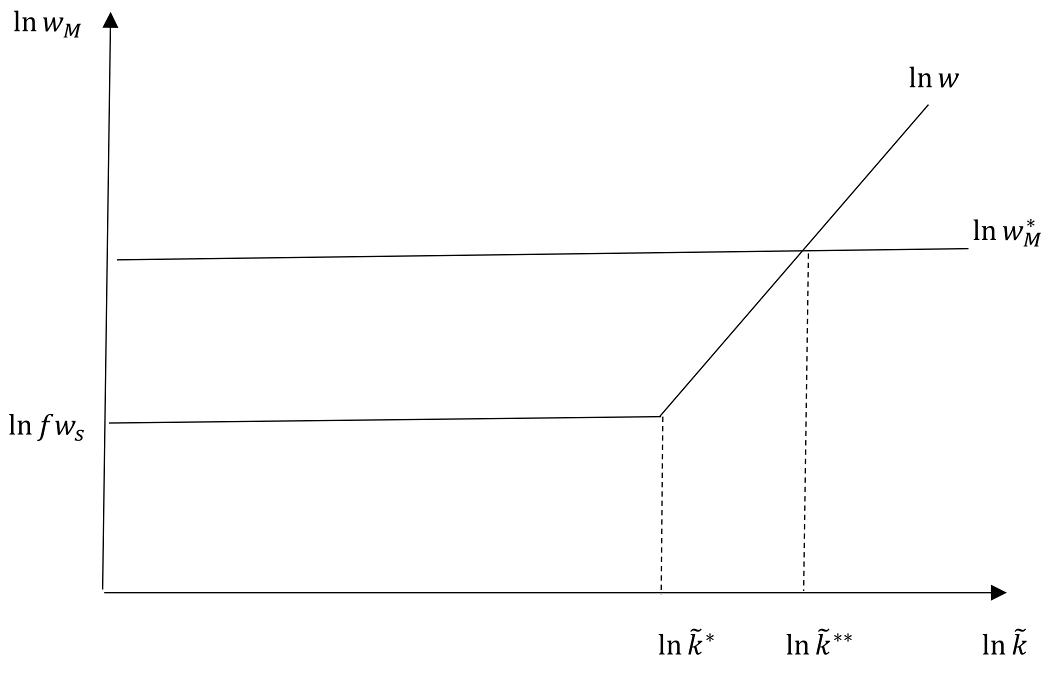
$$r = \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} \left[ \frac{(1-\alpha)}{w_M} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \qquad (15)$$

✓ Substituindo (15) em (12):

$$s_p \alpha A^{\frac{1}{\alpha}} \left[ \frac{(1-\alpha)}{w_M} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \delta = n$$

$$\left[ \frac{(1-\alpha)}{w_M} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \left( \frac{\delta + n}{\alpha s_p} \right) A^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$w_M^* = A^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} (1-\alpha) \left[ \frac{s_p \alpha}{\delta + n} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad (16)$$



## Propriedades do Steady-State do Modelo de Lewis

- ✓ Se $w_M^* > f w_s$ então o steady-state do modelo de Lewis é o mesmo do Modelo de Solow.
- ✓ A expansão do setor capitalista ocorre a taxas constantes ao invés de declinantes até que o ponto de Lewis seja alcançado. Essa taxa de expansão é dada por: $\sigma = s_p r$ .
- ✓ A taxa de lucro e a produtividade do setor capitalista não se alteram durante a fase de transição, ou seja, enquanto o "ponto de Lewis" não á atingido.
- ✓ Considere que: $Y = S + M$ (17), onde Y é a produção agregada.
- ✓ Suponha que $w_s = 1$, temos que:
- ✓ $Y = L_s + AK^{\alpha} L_M^{(1-\alpha)}$ (18)

  Sabemos que

$$L_M^* = \left[\frac{A(1-\alpha)}{w_M}\right]^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} K \qquad (5)$$

- ✓ Sabemos que : $L = L_s + L_M \leftrightarrow L_M = L - L_s$ . Logo temos que:
- ✓ $Y = L + AK^{\alpha} L_M^{(1-\alpha)} - L_M$ $(17a)$
- ✓ Assuma, sem perda de generalidade, que *f=1;* logo $w_M = w_s = 1$.
- ✓ Substituindo (5) em (17ª), temos:

$$Y = L + AK^{\alpha} \left\{ [(1-\alpha)A]^{\frac{1}{\alpha}} K \right\}^{1-\alpha} - [(1-\alpha)A]^{\frac{1}{\alpha}} K$$

- ✓ Após alguns algebrismos chega-se na seguinte expressão:

$$Y = L + \alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} A^{\frac{1}{\alpha}} K \quad (19)$$

- ✓ Observa-se na equação (19) que a função agregada de produção é homogênea de grau um no trabalho e no capital, ou seja, durante a fase de transição a economia opera com rendimentos marginais constantes tanto para o capital como para o trabalho.
- ✓ Embora a tecnologia no setor capitalista esteja sujeita a rendimentos marginais decrescentes do capital, a função de produção agregada opera com rendimentos marginais constantes.
- ✓ Durante a fase de trabalho excedente a intensidade do capital e a renda per-capita aumentam; mas a razão é completamente diferente do modelo de Solow.

- No modelo de Solow o produto per-capita cresce porque a intensidade do capital no setor capitalista aumenta, fazendo o trabalhador mais produtivo.
    - Mas no modelo de Lewis não há aumento da intensidade do capital no setor capitalista durante a fase de trabalho excedente (ver equação 5).
- O aumento da produtividade global da economia decorre da realocação (mudança estrutural) dos trabalhadores do setor de subsistência para o setor capitalista, cuja produtividade é mais alta.
- Vejamos:

$$\tilde{y} = w_s \left(\frac{L_s}{L}\right) + \tilde{y}_M \frac{L_M}{L} \qquad (20)$$

- Rearranjando a equação, temos:

$$\tilde{y} = w_s + (\tilde{y}_M - w_s)\left(\frac{L_M}{L}\right) \ (21)$$

$$onde: \tilde{y} = \frac{Y}{L} \ \ e \ \ \tilde{y}_M = \frac{M}{L_M}$$

- Durante a fase de transição $\tilde{y}_M$ fica constante (ver equação 19); mas $\left(\frac{L_M}{L}\right)$ aumenta.
- Lembrando que: $\tilde{y}_M = \frac{M}{L_M} = \frac{AK^{\alpha}(L_M)^{1-\alpha}}{L_M} = A\frac{K^{\alpha}}{L_M^{\alpha}} = A\tilde{k}^{\alpha}$ (22)
- Como os salários são constantes durante a fase de transição, os ganhos de produtividade são inteiramente absorvidos pelos lucros.

## **Exercícios Propostos**.

1) Calcule a taxa de crescimento do produto e do estoque de capital durante a dinâmica de transição, ou seja, enquanto a economia não alcança o "ponto de Lewis".
2) Calcule a taxa de poupança da economia, ou seja, $\frac{S}{Y}$ durante o período de transição. Qual a relação entre a taxa de poupança e a participação dos lucros na renda durante o período de transição? O que acontece com a participação dos lucros na renda? Explique.
3) Qual será o efeito sobre a taxa de crescimento do produto e do estoque de capital durante a dinâmica de transição de um aumento da propensão a poupar a partir dos lucros? Como você interpreta esse resultado?
4) Qual será a taxa de crescimento do produto e do estoque de capital assim que a economia atinja o seu *steady-state*, supondo que o mesmo esteja a direita do "ponto de Lewis"? Justifique sua resposta.