A Teoria Neoclássica do Crescimento e Distribuição

José Luis Oreiro

Professor do Departamento de Economia da Universidade de Brasília

Pesquisador Nível IC do CNPq.

Crescimento Determinado pelas Condições de Oferta

- Modelos Neoclássicos de Crescimento: Solow (1956/1957)
- O crescimento de longo-prazo é determinado pela taxa de acumulação de fatores de produção (capital e trabalho) e pelo ritmo de crescimento da produtividade do trabalho (progresso tecnológico)
- Esses fatores determinam a tendência de crescimento de longo-prazo das economias capitalistas.
- A demanda agregada é importante apenas para explicar os desvios do PIB real com respeito a tendência de longo-prazo, ou seja, aquilo que os economistas chamam de ciclo econômico.

Estrutura Básica do Modelo

- Consideremos uma economia que produz um único bem (trigo), a partir de dois fatores de produção, a saber : trabalho e capital.
- Este último é constituído pelo trigo que não foi utilizado no período anterior para o atendimento da demanda de consumo, ou seja, trata-se do estoque "poupado" de trigo.
- Podemos representar a quantidade produzida de trigo por intermédio da seguinte função macroeconômica de produção:

$$Y = F(K,L); \quad F_K > 0; F_L > 0; F_{KK} < 0; F_{LL} < 0; F_{KL} = F_{LK} > 0 \quad (1)$$

Incorporando o progresso técnico

- A função de produção desenvolvida até aqui supõe que a tecnologia é dada, ou seja, que não há progresso tecnológico.
- No entanto, é possível incorporar o mesmo a essa função.
- Uma forma possível de fazê-lo é colocar um parâmetro que representa a eficiência do trabalho, parâmetro esse cujo valor se altera em decorrência do progresso tecnológico.
- Dessa forma, o avanço técnico se traduzirá em um aumento da eficiência com a qual os trabalhadores produzem bens e serviços:
  - $Y = F(K, AL) \quad (2)$

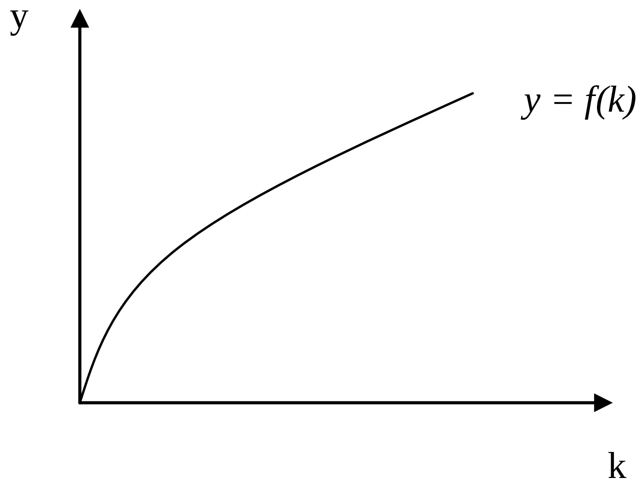
Retornos Constantes de Escala

- Supondo que a função é homogênea linear, ou seja, que os retornos de escala são constantes, segue-se que a equação (2) pode ser expressa na forma intensiva, ou seja:

$$k = \frac{K}{AL} \qquad y = \frac{Y}{AL}$$

$$y = f(k) \quad (3)$$

Figura 1



A Fronteira Salário-Lucro

- Se os retornos de escala são constantes, então vale o *teorema de Euller* segundo o qual:

$$Y = \frac{\partial Y}{\partial K} K + \frac{\partial Y}{\partial L} AL \quad (4)$$

- No modelo de Solow, consideramos que prevalece a concorrência perfeita nos mercados de fatores de produção, de forma que a remuneração dos mesmos será igual a sua produtividade marginal, ou seja:

$$Y = rK + wAL \quad (5)$$

A Fronteira Salário-Lucro

- Dividindo-se (2) por *AL*, temos após os algebrismos necessários que:

$$r = f'(k) \qquad (6)$$

$$w = f(k) - f'(k)k \qquad (7)$$

- As equações (6) e (7) apresentam a taxa de lucro e a taxa de salário real como uma função do *estoque de capital por unidade de trabalho eficiente*.
- Sendo assim, se conhecermos a dotação dos fatores de produção, ou seja, as quantidades existentes de capital e trabalho; então será possível determinar o estoque de capital por unidade de trabalho eficiente e, dessa forma, a remuneração dos fatores de produção.

A Fronteira Salário-Lucro

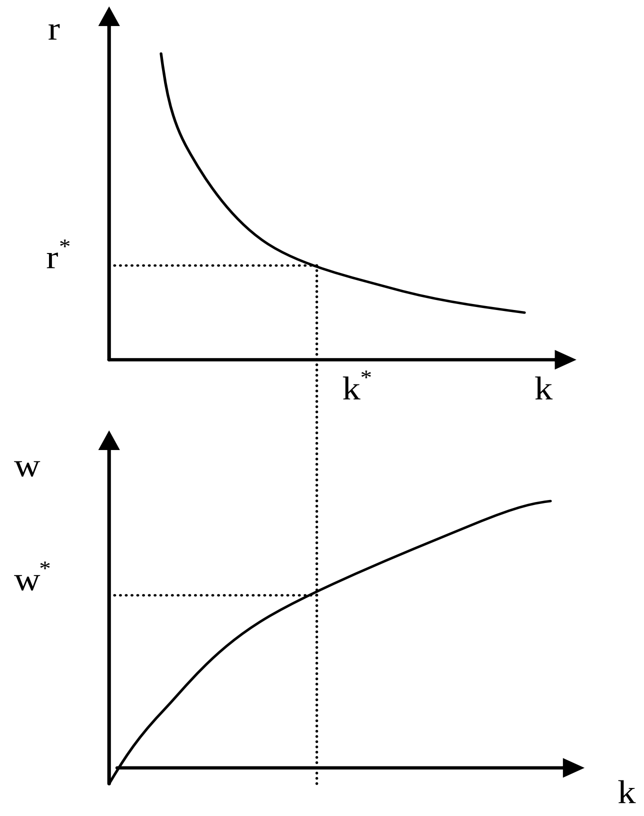
- Para que seja possível apresentar geometricamente a determinação dos salários e dos lucros, é necessário analisar a resposta dessas variáveis à um aumento da intensidade do capital, isto é, um aumento do capital por trabalhador.
- Diferenciando totalmente (6) e (7), obtemos que:

$$\frac{\partial r}{\partial k} = f'' < 0 \qquad (8a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial k} = -f''k > 0 \qquad (8b)$$

A Fronteira Salário-Lucro

Figura 2



Fronteira Salário-Lucro

- Um aumento de k tem dois efeitos imediatos.
  - Por um lado, produz uma redução da produtividade marginal do capital; por outro, leva a um aumento da produtividade marginal do trabalho (uma vez que a produtividade marginal cruzada dos fatores é crescente).
  - Como a concorrência entre os donos dos fatores de produção faz com que os mesmos sejam remunerados de acordo com as suas produtividades marginais; segue-se que a taxa de salário real irá aumentar, ao passo que a taxa de lucro irá se reduzir.
- Esse pequeno experimento lógico nos permite tirar a seguinte conclusão : à medida que k aumenta – isto é, à medida em que a economia acumula uma quantidade maior de capital por trabalhador – haverá uma redução progressiva da taxa de lucro e um aumento contínuo do salário real.

Fronteira Salário-Lucro

- Para obter a equação referente à fronteira salário-lucro, observemos inicialmente que, com base na equação da remuneração do capital (equação 6), podemos expressar o estoque de capital por unidade de trabalho eficiente como uma função (inversa) da taxa de lucro. Temos, então que:
  - $k = k(r) \quad ; \quad k' < 0 \quad (9)$
- Substituindo (9) em (7) temos após os algebrismos necessários que:

$$w = f\left[k(r)\right] - rk(r) \quad ; \frac{\partial w}{\partial r} < 0 \quad (10)$$

Fronteira Salário-Lucro

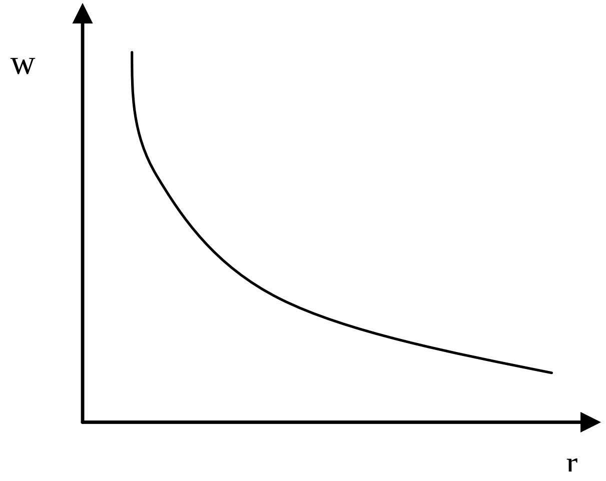


Figura 3

Acumulação de Capital

- Iremos supor que as famílias dessa economia poupam uma fração constante de suas rendas, de tal forma que a poupança agregada é dada por:

$$S = sY = sf\left(\frac{K}{AL}\right)AL \quad (11)$$

- Tal como no caso da função de produção, a poupança pode ser expressa na forma intensiva (ou seja, por unidade de trabalho eficiente), da seguinte forma:

$$\frac{S}{AL} = sy = sf(k) \quad (12)$$

Acumulação de capital

- Iremos supor, também, a existência de um único ativo nessa economia (capital), de tal forma que as famílias não têm outra opção para armazenarem suas poupanças que não a compra direta de bens de capital.
- Utilizando a metáfora do trigo, que considera uma economia cujo único bem produzido é o próprio trigo, a opção de poupança das famílias seria exatamente guardá-lo.
- Como o mesmo é também o capital da economia, decorre que ao não consumi-lo a família estará aumentando o estoque de capital total.
- Desse raciocínio, segue-se que não há distinção entre as decisões de poupança e investimento, ou seja, poupar é o mesmo que investir

Acumulação de Capital

- Defina-se δ a taxa de depreciação do estoque de capital e I o investimento bruto.
- Sabendo que $\dot{K} = I - \delta K$
- E que: I = S = sY
- Chega-se à equação de acumulação de acumulação de capital do modelo de Solow, dada por:

$$\dot{K} = sY - \delta K \quad (13)$$

Acumulação de Capital

- Sabemos que:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}(AL) - K(\dot{A}L + A\dot{L})}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{\dot{A}}{A}\frac{K}{AL}\frac{L}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{AL}\frac{A}{A}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{\dot{A}}{A}\frac{K}{AL} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{AL} \qquad (14)$$

- Onde: $\frac{\dot{A}}{A}$ é a taxa de crescimento do fator de eficiência do trabalho, ou seja, trata-se do ritmo de progresso tecnológico, que designaremos por *g*.

Acumulação de Capital

- O progresso técnico é essencialmente exógeno no modelo de Solow, ou seja, este modelo não é capaz de determinar endógenamente o ritmo de crescimento do fator de eficiência do trabalho.
- Essa hipótese é uma decorrência lógica da estrutura do próprio modelo.
- Com efeito, nas condições supostas no modelo de Solow, quais sejam: concorrência perfeita nos mercados de fatores e retornos constantes de escala, toda a produção é "exausta" na remuneração dos fatores de produção de acordo com suas produtividades marginais.
- Dessa forma, não resta nada do produto real dessa economia para remunerar a atividade de pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias.
- Nesse contexto, a *tecnologia é um bem livre*, isto é, disponível gratuitamente para todos que desejam utilizá-la, e o seu aperfeiçoamento não pode ser explicado por fatores econômicos.
- Daí a necessidade de supor que a eficiência do trabalho cresce a uma taxa exógena .

Acumulação de capital

- Temos também $\frac{\dot{L}}{L}$ que é a taxa de crescimento da força de trabalho.
- Supondo que a taxa de participação (ou seja, o percentual da população que faz parte da força de trabalho) e a taxa de desemprego são constantes ao longo do tempo; então a taxa de crescimento da força de trabalho é igual à taxa de crescimento da população.
- Dessa forma, iremos supor que a taxa de crescimento da população é uma constante exógena, dada por η .

Acumulação de Capital

- Substituindo (13) em (14) temos após os algebrismos necessários que:

$$\dot{k} = \frac{sY - \delta K}{AL} - gk - \eta k = sy - \delta k - gk - \eta k \quad (15)$$

- Substituindo (3) na equação acima, obtemos a seguinte expressão:

$$\dot{k} = sf(k) - k(\delta + g + \eta) \quad (16)$$

A Equação Fundamental de Crescimento

- A equação (16) é a assim chamada ***equação fundamental de crescimento de Solow.***
- Essa equação nos diz que a dinâmica do estoque de capital por unidade de trabalho eficiente depende da diferença entre o *investimento realizado* por unidade de trabalho eficiente e o *investimento requerido* para manter o estoque de capital por unidade de trabalho eficiente constante.
- Quando o primeiro termo dessa subtração é maior do que o segundo, o investimento nessa economia será mais do que suficiente para:
  - (i) compensar a depreciação do estoque de capital,
  - (ii) equipar os novos trabalhadores com a mesma "quantidade de equipamento" dos utilizada pelos trabalhadores antigos e
  - (iii) compensar o efeito do progresso tecnológico sobre a quantidade de capital por unidade de trabalho eficiente.
- Nesse contexto, ocorre um aumento da intensidade de capital, isto é, a quantidade de capital por unidade de trabalho eficiente aumenta

Equilíbrio de Longo-Prazo

- Iremos definir equilíbrio de longo-prazo nessa economia como a situação em que não há nenhuma variação endógena do estoque de capital por unidade de trabalho eficiente, ou seja, quando as variações no mesmo se dão apenas por alterações exógenas nos parâmetros.
- Fazendo $\dot{k} = 0$ em (16):

$$sf(k^*) = k(\delta + g + \eta) \quad (17)$$

- Na equação (17), k * é o estoque de capital por unidade de trabalho eficiente de equilíbrio de longo-prazo dessa economia.
- Para que seja possível determinar precisamente o valor de devemos definir a forma funcional da função de produção.

Equilíbrio de Longo-Prazo

- Uma forma funcional possível é a função Cobb-Douglas, como a que apresentamos abaixo:

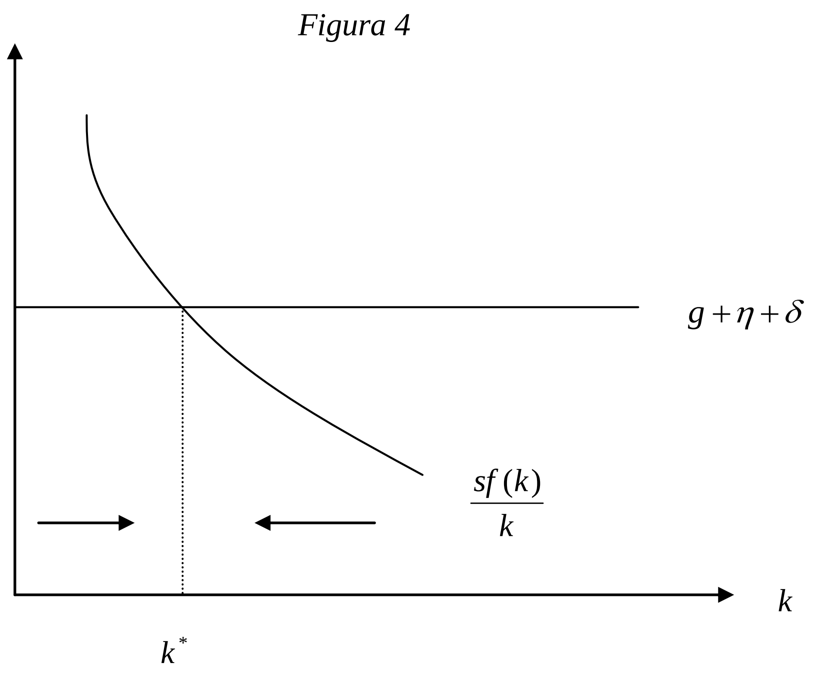
$$f(k) = k^{\alpha} \quad (18)$$

- Utilizando essa forma funcional na equação de equilíbrio de longo-prazo (17), podemos calcular o valor de , como se segue abaixo:

$$sk^{*\alpha} = k(\delta + g + \eta) \quad (19)$$

$$k^{*} = \left(\frac{s}{\delta + g + \eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (20)$$

Equilíbrio de Longo-Prazo



Propriedades do Equilíbrio de Longo-Prazo

- No equilíbrio de longo-prazo, sabemos que y e k são constantes ao longo do tempo.
- Isso, no entanto, não significa que o estoque de capital e o nível de produto permanecem constantes ao longo do tempo.
- Com efeito, o estoque de capital da economia estará crescendo a uma taxa $(\eta+g)$.
- Isso porque k constante implica que K tem que crescer à mesma taxa que AL.
- Por outro lado, y constante implica que Y tem que crescer à mesma taxa que AL, de tal forma que o produto também crescerá a uma taxa de $(\eta+g)$.
- Vemos, portanto, que o crescimento no longo-prazo, tanto do estoque de capital quanto do produto, depende diretamente de parâmetros exógenos.
- Dessa forma, o modelo de Solow não contém em si mesmo uma explicação do fenômeno do crescimento, uma vez que o motor desse crescimento, no longo-prazo, é constituído pelo crescimento populacional e pelo progresso tecnológico, que são fatores não explicados pelo referido modelo.
- Essa é a razão pela qual este modelo pode também ser denominado de *modelo de crescimento exógeno*.

Crescimento e Distribuição

- Estamos, agora, em condições de analisar a interação entre crescimento e distribuição de renda, segundo o modelo de Solow.
- O modelo de crescimento e distribuição de renda de Solow pode ser apresentado pelo seguinte sistema de equações:

$$\frac{sf(k)}{k} = g + \eta + \delta \qquad (17)$$

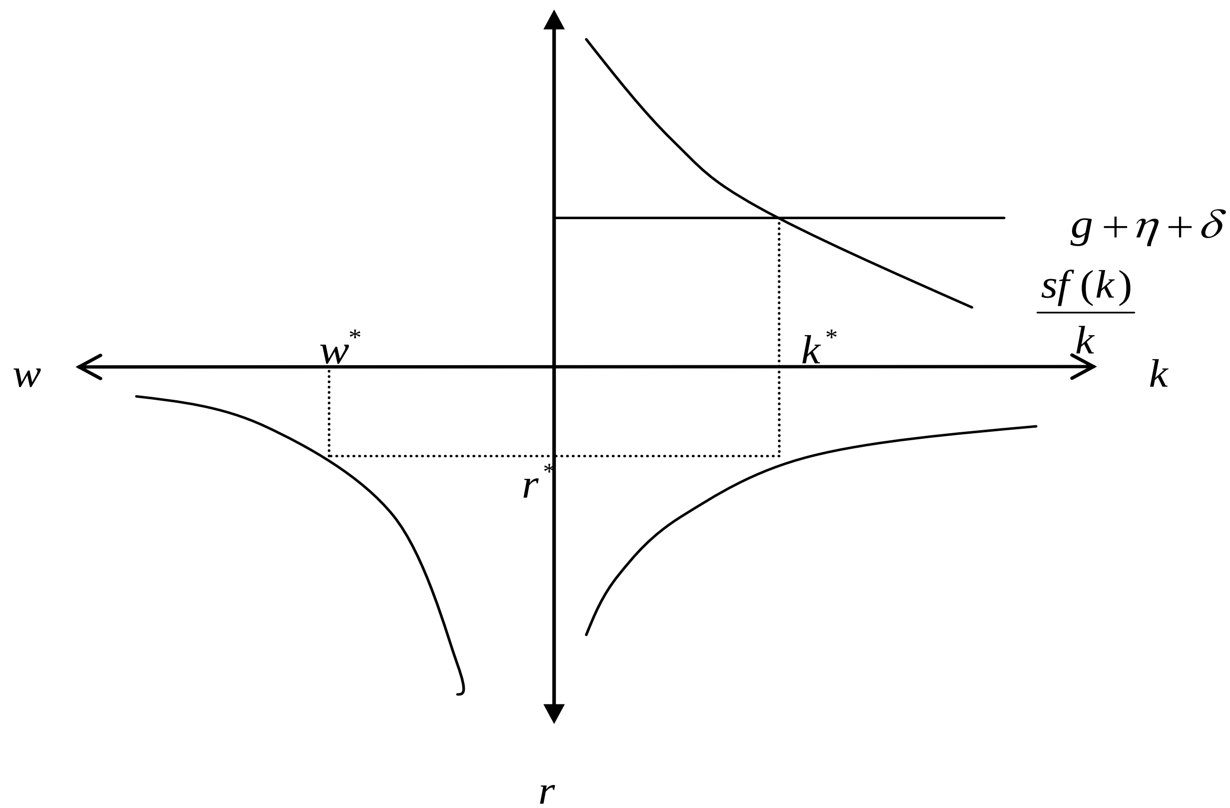
$$r = f'(k) \qquad (6)$$

$$w = f\left[k(r)\right] - rk(r) \qquad (10)$$

- O sistema formado pelas equações (17), (6) e (10) possui três incógnitas, a saber : *k*, *r* e *w*.
- As variáveis exógenas são *s, n, g* e δ.
- Como o sistema tem o mesmo número de equações do que de incógnitas segue-se que, a princípio, existe uma solução para o mesmo.

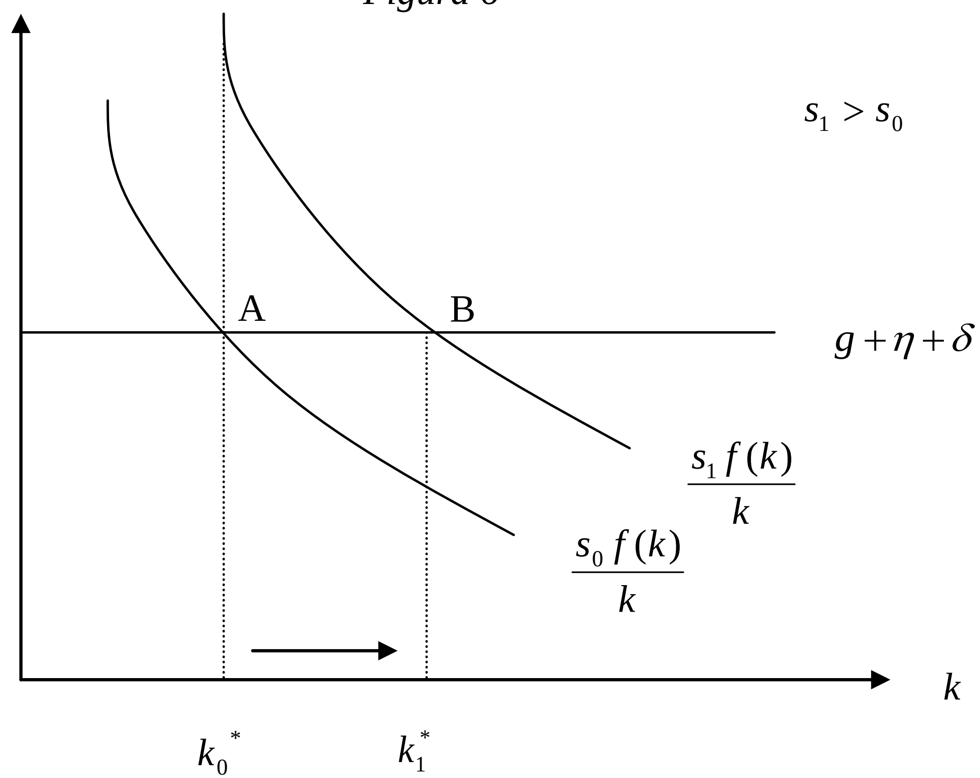
Crescimento e Distribuição

Figura 5



Efeitos de um Aumento da Taxa de Poupança

Figura 6



Growth Accounting

- Supondo uma economia na qual:
  - Prevaleça a concorrência perfeita em todos os mercados, incluindo os mercados de fatores de produção.
  - Os retornos de escala sejam constantes.
  - O progresso técnico seja desincorporado.
- A taxa de crescimento do produto real pode ser expressa por:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{A}}{A} + \eta_k \frac{\dot{K}}{K} + \eta_L \frac{\dot{L}}{L}$$

Growth Accounting

- Usando dados da Economia Norte-Americana (Branson, 1989, p.635), temos:
  - Participação do capital na renda: 0.25
  - Participação do trabalho na renda: 0.75
  - Taxa média de crescimento da força de trabalho: 1,5% a.a.
  - Taxa Média de crescimento do capital e do produto: 2,5% a.a.
- A produtividade total dos fatores de produção é calculada residualmente como: 0.025 – 0.25*0.025 – 0.75*0.015 = 0.0075 (ou seja, 0.75% a.a).
- Daqui se segue que cerca de 30% do crescimento de longo-prazo da economia norte-americana não pode ser explicado pela acumulação de fatores de produção.

Growth Accounting

- Para os economistas neoclássicos, o "resíduo de Solow" seria uma medida do ritmo de progresso tecnológico da economia, pois mostra o crescimento do produto que não é "causado" pela acumulação de fatores de produção.
- Edward Dennison, grande especialista em crescimento de longo-prazo, denominou esse resíduo de "uma medida da nossa ignorância".
  - O resíduo de Solow pode ser mais o resultado de uma mensuração pouco precisa dos "insumos" utilizados no processo produtivo e/ou da existência de retornos crescentes de escala do que da ocorrência de progresso tecnológico.

Growth Accounting

- No caso brasileiro, a aplicação da fórmula de Solow pode ser feita da seguinte forma:
  - Participação do capital na renda: 0.4
  - Participação do trabalho na renda: 0.6
  - Taxa de crescimento do estoque de capital: 4% a.a.
  - Taxa de crescimento da força de trabalho: 1.5% a.a.
- Como a PTF é um resíduo está claro que ela não pode ser considerada como um dado para a estimativa da taxa de crescimento de longo-prazo da economia brasileira.
- Segue-se então que todo os trabalhos de *growth accounting* para a economia brasileira tomam como ponto de partida uma "estimativa" ("chute educado" ou convenção) sobre o crescimento do produto real no longo-prazo, para depois "calcular" a PTF requerida para dar suporte a essa convenção.
  - Temos: PTF = 0.035 – 0.4*0.04 – 0.6*0.015 = 0.01
- Conclusão: a economia brasileira cresce pouco PORQUE ela apresenta um baixo dinamismo tecnológico !!!!

Críticas à Abordagem Neoclássica

- Tecnologia é um “bem público”.
  - No modelo neoclássico de crescimento, prevalece a concorrência perfeita e os retornos de escala são constantes.
    - Nesse contexto, vale o assim chamado *teorema da exaustão do produto* segundo o qual o PIB é inteiramente *gasto* com a remuneração dos fatores de produção (capital e trabalho), não sobrando nada para a remuneração do progresso tecnológico.
  - A tecnologia é um bem livre, estando disponível para qualquer empresa e para qualquer país.
  - O progresso tecnológico só pode ser tratado como exógeno ao sistema econômico.
  - A fonte mais importante do crescimento de longo-prazo não é explicada pelo modelo neoclássico de crescimento.

Críticas ...

- Controvérsia do Capital (Cambridge - EUA X Cambridge – Reino Unido).
  - Joan Robinson e Piero Sraffa: Como medir o estoque de capital à nível da economia como um todo?
    - Um procedimento simples seria multiplicar as quantidades de cada um dos diferentes itens que compõe o “capital” de uma dada economia pelos seus respectivos “preços de oferta”. O resultado seria então o valor agregado do estoque de capital.
    - O problema é que a medida do estoque de capital não é independente da distribuição de renda.
    - O preço de oferta de cada item de capital incorpora a “taxa normal de lucro”. Dessa forma, mudanças na distribuição de renda entre salários e lucros afetam os preços de oferta de cada item do “capital” e, portanto, o valor do estoque de capital à nível da economia como um todo.
    - É impossível calcular o valor e/ou a taxa de crescimento do estoque de capital de forma independente da participação do capital na renda nacional.
    - A fórmula de Solow é errada do ponto de vista metodológico.

O Modelo de Mankiw, Romer e Weil (1992)

- Segundo Mankiw, Romer e Weill (1992) o modelo original de Solow não consegue dar conta das diferenças em consideração por se basear numa concepção muito estreita de capital.
- De fato, o estoque de capital é tido como sendo constituído unicamente de capital físico
- Nesse contexto, consideremos que a quantidade produzida seja uma função de três insumos : o capital físico (K), o capital humano (H) e o trabalho (L).
- Em particular, consideremos que a função de produção seja dada pela seguinte equação:
  – $\mathbf{Y_t = K_t^a H_t^{\phi} (A_t L_t)^{1-a-\phi}}$ **(1)**

O modelo ...

- Dividindo-se a equação (1) por *AL* temos
  - $\mathbf{y_t = (k_t)^a (h_t)^\phi}$ (2) onde : $\mathbf{h_t = H_t/(A_t L_t)}$
- De forma análoga ao modelo original de Solow, consideremos que as famílias investem uma fração fixa (s_h) da renda total em capital humano e uma fração fixa (s_k) em capital físico.
- Sendo assim, a acumulação de capital físico é dada pela seguinte equação:
  - $\mathbf{(\partial h/\partial t)/h = \{s_h [k^a h^\phi] - (g + \eta) h \}}$ (2)
- A equação de acumulação de capital físico é dada por :
  - $\mathbf{(\partial k/\partial t)/k = \{s_h [k^a h^\phi] - (g + \eta) k \}}$ (3)
- Os valores de *steady-state* de k e h podem ser obtidos facilmente a partir das equações (2) e (3).
- Temos, após os algebrismos necessários, que :
  - $\mathbf{k = \{ [(s_k)^{1-\phi} (s_h)^\phi]/(g + \eta)\}^{1/(1-a-\phi)}}$ (4)
  - $\mathbf{h = \{ [(s_k)^{1-\phi} (s_h)^\phi]/(g + \eta)\}^{1/(1-a-\phi)}}$ (5)

O modelo ...

- Substituindo as equações (4) e (5) em (2), multiplicando ambos os lados por A_t , Log-linearizando a equação resultante, e diferenciando a mesma com respeito ao tempo :
  - **$dq_t /qt = \{a/(1-a-\phi)\}(ds_k/s_k) + \{\phi /(1-a-\phi)\}(ds_h/h)$** (6)
- Se supusermos que a taxa de acumulação de capital físico é igual a taxa de acumulação de capital humano, ou seja, $s_h = s_k = s$; a equação (18) fica reduzida à seguinte expressão :
  - **$dq_t /qt = \{(a+\phi)/(1-a-\phi)\}(ds/s)$** (7)

O modelo ...

- Na equação (7) , a participação dos salários na renda é medida, agora, por 1-a-ϕ.
- Daqui se segue que a participação do capital na renda é igual a $a+\phi$.
- Dado que *a* é a parte da renda agregada que é devida ao capital físico, então ϕ é a parcela que cabe ao capital humano.
- Temos, portanto, que a participação do capital na renda agregada aumentou de *a* para $a+\phi$.
- A estimativa de Mankiw, Romer e Weill para o valor de $a+\phi$ é de 2/3, sendo 1/3 para *a* e o outro 1/3 para ϕ.
- Nesse caso, o valor do termo entre chaves na equação (7) é igual a 2.
- Sendo assim, para uma diferença nas taxas de poupança da ordem de 4 entre os países; a diferença nos níveis de renda per-capita seria da ordem de 8.
- Essa magnitude da diferença entre os níveis de renda per-capita seria perfeitamente compatível com a experiência internacional.

A Nova Teoria Neoclássica do Crescimento

- A partir da segunda metade dos anos 80 houve um recrudescimento do interesse pela questão do crescimento econômico por parte dos autores neoclássicos.
- As assim denominadas *novas teorias do crescimento* se propunham a abandonar algumas das hipóteses básicas do modelo de Solow; de forma a poder contornar a sua incapacidade de produzir *endogenamente* uma trajetória de crescimento contínuo para o nível de renda per-capita.
- De acordo com Ellery & Ferreira (1996), as novas teorias do crescimento podem ser classificadas em dois grupos, tendo como critério de classificação o tipo de mudança que é realizado na estrutura básica do modelo de crescimento de Solow.
  - O primeiro grupo de teorias engloba os modelos de Romer (1986), Lucas (1988) e Rebello (1991).
    - A diferença entre os modelos que fazem parte desse grupo e o modelo de crescimento de Solow é que naqueles os rendimentos marginais do *fator acumulável* são tidos como constantes ou crescentes; ao passo que no modelo de Solow tais rendimentos são decrescentes.
    - Deve-se mencionar que, à exceção do modelo de Lucas (1988), os modelos que fazem parte do grupo em consideração tratam a tecnologia da mesma forma como ela é tratada no modelo de Solow, isto é, como um *bem público* (cf. Romer, 1991).
  - O segundo grupo de teorias engloba os modelos de Romer (1990), Grossman & Helpman (1989) e Aghion e Howitt (1992).
    - Os modelos que fazem parte desse grupo empregam uma concepção de tecnologia que é **substancialmente** diferente daquela que é empregada no modelo de Solow.
    - Ao invés de considerar a tecnologia como um bem público, se trata a tecnologia como um **bem não-rival** , porém excluível; ou seja, um bem que pode ser privadamente apropriado através, por exemplo, da concessão de patentes ou licenças de operação.
    - Essa caracterização da tecnologia, contudo, obriga o abandono da hipótese de concorrência perfeita em benefício da hipótese de concorrência imperfeita. Em condições de concorrência imperfeita deixa de ser válido o teorema de Euller-Wicksteed, tornando possível a existência de um *excedente econômico* que pode ser utilizado para a remuneração da atividade de inovação.

Modelos de Crescimento com Rendimentos Constantes ou Crescentes sob o Fator Acumulável

- Segundo Sala-i-Martin (1990b, p.4) o modelo de Rebello (1991) pode ser considerado como o exemplo representativo da classe de modelos de crescimento com rendimentos constantes ou decrescentes sob o fator acumulável; os demais modelos de crescimento podem ser vistos como extensões ou *como* constituindo os fundamentos microeconômicos do mesmo.

Estrutura do modelo

- Consideremos uma economia na qual a função de ptodução seja linear em um único insumo, capital , podendo ser representada pela seguinte equação :
  - $\mathbf{Y_t = A\ K_t}$ (1)
- Ao invés de considerarmos que as famílias poupam uma fração constante *s* de suas rendas, iremos supor que elas escolhem o padrão desejado de consumo ao longo do tempo de forma a maximizar a seguinte função utilidade inter-temporal :
  - $\mathbf{U = \int_0^{\infty} exp(-\rho t)\{ c_t^{1-\sigma} / (1-\sigma)\}dt}$ (2)

Estrutura do modelo

- Para fins de simplicidade de exposição, consideremos que a população é constante ao longo do tempo, ou seja, η=0.
- Para simplificar ainda mais o modelo, normalizemos o tamanho da população em 1.
- Nesse contexto, a evolução do estoque de capital per-capita ao longo do tempo pode ser descrita por intermédio da seguinte equação :
  – $\partial \mathbf{k}/\partial \mathbf{t} = \mathbf{A\ k - c}$ (3)
- Como a economia acima descrita satisfaz as condições de validade do segundo teorema da economia do bem-estar; segue-se que a determinação das trajetórias no tempo do consumo e do capital per-capita pode ser feita através da maximização da equação (2) sujeita a restrição imposta pela equação (3).
- Esse problema de maximização pode ser representado pelo seguinte Hamiltoniano :
  – $\mathbf{MAX}_{c,k}\ \mathbf{H(.) = Exp(-\rho t)\{ c_t^{1-\sigma} / (1-\sigma) \} + \lambda [A\ k - c]}$ (4)
- As condições de primeira ordem para a solução de (4) são dadas pelo seguinte conjunto de equações :
  – $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{exp(-\rho t)\ c_t^{-\sigma}}$ (5a)
  – $\partial \boldsymbol{\lambda}/\partial \mathbf{t} = -\boldsymbol{\lambda}\ \mathbf{A}$ (5b)
- Log-linearizando a equação (5a), e diferenciando a equação resultante com relação ao tempo, temos :
  – $\mathbf{(\partial \lambda/\partial t)/\lambda = - \rho + \sigma\ \gamma_c}$ (6)
  – onde : γ_c é a taxa de crescimento do consumo per-capita.

Estrutura do Modelo

- Substituindo a equação (5b) na equação (6), temos que :
  - $\gamma_c = (1/\sigma)[A - \rho]$ (7)
- A equação (7) mostra que a taxa de crescimento do consumo per-capita é constante, e, em geral, diferente de zero; sendo determinada pela eficiência da tecnologia empregada na economia em consideração (medida pela constante A) e pelas preferências dos indivíduos (representadas pelas constantes ρ e σ).
- Para obter a taxa de crescimento do estoque de capital e da renda per-capita; divida-se a equação (5a) por k. Temos, então, que :
  - $c/k = A - \gamma_k$ (8)
- Log-linerarizando a equação (8) e diferenciando com relação ao tempo, temos :
  - $\gamma_c = \gamma_k = \gamma$ (9)
- Em palavras : a taxa de crescimento do capital per-capita é igual a taxa de crescimento do consumo per-capita.
- Com base na equação (1) é imediato que a taxa de crescimento da renda e do capital per-capita são idênticas.
- Daqui se segue que a renda per-capita deve crescer ao longo do tempo à taxa determinada pela seguinte equação :
  - $\gamma = (1/\sigma)[A - \rho]$ (9)

Interpretação do resultado

- A equação (9) mostra que as divergências observadas entre as taxas de crescimento da renda per-capita dos diversos países só podem resultar de
  - (i) diferenças na tecnologia de produção empregada em cada país, e
  - (ii) diferenças nas preferências dos consumidores de cada país a respeito da alocação inter-temporal do consumo.
- Explicar as diferenças observadas nas taxas de crescimento da renda per-capita com base em (ii) esbarra no inconveniente de que os parâmetros ρ e σ são variáveis que não são diretamente observáveis.
- Tal fato põe em dúvida a possibilidade de realização de qualquer tipo de teste empírico para avaliar a plausibilidade dessa explicação como causa da existência das diferenças observadas nas taxas de crescimento da renda per-capita.

Modelos de Crescimento com Atividades de Pesquisa e Desenvolvimento

- O modelo de Romer (1990) foi um dos primeiros modelos da nova teoria do crescimento a tratar o progresso tecnológico como o resultado da busca intencional de lucros por parte das firmas.
- Nesse contexto, a tecnologia é tratada como sendo um bem não-rival, porém excluível; isto é, a tecnologia continua sendo tratada como conhecimento de aplicabilidade geral, mas esse conhecimento pode ser agora apropriado através de patentes ou licenças de produção, de forma que o seu proprietário pode obter uma renda a partir do licenciamento dessa tecnologia para outros indivíduos ou firmas.
- A caracterização da tecnologia como um bem não-rival, mas excluível obriga ao abandono da hipótese de concorrência de perfeita, e a sua substituição pela hipótese de concorrência imperfeita ou monopolística.
- Para demonstrar a validade dessa afirmação, consideremos que F(A, X) seja uma função que represente um processo de produção que utilize um vetor de insumos rivais, **X**, e um insumo não-rival, **A** .
- Se **A** é um insumo não-rival, segue-se que ele pode ser utilizado em diversas ***plantas*** simultâneamente. Sendo assim, por replicação temos:
  - $\mathbf{F(A,\lambda X) = \lambda F(A,X)\ ;\ \lambda > 1}$ **(1)**

Modelos ...

- Nesse caso, F(.) não pode ser homogênea de grau um. De fato, se o insumo **A** possui algum valor para o processo de produção em consideração, temos que :
- **$F(\lambda A, \lambda X) > F(A, \lambda X)$** (2)
- Substituindo (2) em (1), temos que :
- **$F(\lambda A, \lambda X) > \lambda\, F(A,X)$** (3)
- Como é de conhecimento geral, a hipótese de concorrência perfeita é incompatível com a existência de retornos crescentes ao nível de firma (cf. Romer, 1991, p. 87).
- Segue-se, portanto, que o tratamento da tecnologia como um bem não-rival, mas excluível exige o abandono da hipótese de concorrência perfeita.

Estrutura do Modelo

- No modelo em consideração existem 4 insumos básicos :
  - capital físico,
  - trabalho,
  - capital humano,
  - conhecimento tecnológico.
- O trabalho é visto como aquelas faculdades possuídas por qualquer indivíduo em boas condições de saúde, como, por exemplo, a coordenação motora.
- O capital humano, por sua vez, é uma medida que o efeito cumulativo de atividades como a educação formal e o treinamento no trabalho tem sobre a produtividade dos trabalhadores.
- A economia é composta por três setores :
  - o setor de pesquisa e desenvolvimento,
  - o setor de bens intermediários
  - o setor de bens finais.
- O setor de pesquisa e desenvolvimento utiliza capital humano e o estoque de conhecimento existente para produzir novos projetos de bens de capital.
- Esses novos projetos são vendidos ao setor de produção de bens intermediários onde serão transformados em novos bens de capital.
- Esses, por sua vez, serão licenciados para o setor produtor de bens finais, que os combina com trabalho e capital humano para a produção dos referidos bens.
- A população e a força de trabalho permanecem constantes ao longo do tempo, assim como o estoque de capital humano.

Estrutura do Modelo

- A produção de bens finais é uma função do volume empregado de trabalho, da fração do estoque de capital humano empregado nesse setor e da quantidade e da **<u>variedade</u>** de bens intermediários empregados para esse fim.
- Nesse contexto, o progresso tecnológico aumenta a produtividade do trabalho ao aumentar a variedade, e não a qualidade, dos bens intermediários utilizados na produção de bens finais.
- Sendo assim, a função de produção utilizada pelas firmas dessa economia pode ser apresentada por intermédio da seguinte equação :
  - $\mathbf{Y (H_y, L, X) = H_y^{a} L^{b} \sum_1^{\propto} X_i^{1-a-b}}$ (4)
  - onde : H_y é a fração do estoque de capital humano utilizado na produção de bens finais.

Estrutura do Modelo

- Algumas observações são necessárias a respeito da equação (4).
- Em primeiro lugar, estamos supondo que a função de produção é aditivamente separável nos insumos intermediários.
  - Isso equivale a afirmar que cada unidade monetária investida no insumo X_i não influencia a produtividade marginal do insumo X_j (onde $i \neq j$).
  - Essa hipótese descarta a existência de qualquer relação de complementariedade e/ou substitubilidade entre os bens intermediários .
- Em segundo lugar, como a função de produção descrita pela equação (4) é homogênea de grau um, segue-se que a produção de bens finais pode ser determinada a partir do problema de maximização de lucros de um única firma competitiva.
- Se supusermos que os bens intermediários são perfeitamente divisíveis, a equação (4) pode ser reescrita da seguinte forma :
  - $\mathbf{Y (H_y, L, X) = H_y^a L^b \int_1^{\propto} X_i^{1-a-b} di}$ (5)

Estrutura do Modelo

- O setor de bens intermediários adquire projetos de bens de capital do setor de pesquisa e desenvolvimento, pagando um preço P_A por cada projeto.
- Esse preço consiste no valor que as firmas pagam por uma **patente** infinita sobre cada projeto de bem de capital; sendo que essa patente dá o direito exclusivo de produção do bem intermediário correspondente ao referido projeto.
- Uma vez que uma das firmas desse setor tenha adquirido um projeto para a produção do bem intermediário ***i***, ela pode converter η unidades de produção final em uma unidade do bem em consideração.
- Se a firma ***j*** produzir X_i unidades do bem intermediário ***i***, então ela poderá alugar os serviços do mesmo à um preço P(i) para as firmas do setor de bens finais.
- Deve-se que esse preço é uma variável que está sob controle das firmas do setor de produção de bens intermediários, ou seja, nesse setor prevalecem condições de **concorrência imperfeita**.

Estrutura do Modelo

- Temos, portanto, que o estoque de capital existente num determinado instante do tempo pode ser definido pela seguinte equação :
  - $\mathbf{K = \eta\sum_1^A X_i}$ (6)
  - onde : A é o nível de conhecimento tecnológico.
- No que se refere ao setor de pesquisa e desenvolvimento, iremos supor que todos os agentes engajados em pesquisa tem acesso livre ao estoque total de conhecimento, ou seja, o conhecimento é um ***bem público*** no setor em consideração.
- No entanto, o arranjo institucional vigente nessa economia permite que, de alguma forma não especificada, os projetos resultantes desse esforço de pesquisa possam ser privadamente apropriados por intermédio de patentes; de forma que é possível cobrar pelo uso dos mesmos.
- Sendo assim, a acumulação de conhecimento tecnológico pode ser descrita pela seguinte equação:
  - $\mathbf{\partial A/\partial t = \& H_A A}$ (7)
- Na equação (7), o termo do lado esquerdo representa a taxa instantânea de produção de novos projetos de bens intermediários.
- Essa taxa é uma função da fração do estoque de capital humano empregado no setor de pesquisa e desenvolvimento (H_A), do estoque de conhecimento e de projetos existentes num determinado instante do tempo (A) e de uma constante de eficiência (&).
- Fica claro na equação acima que a produtividade do capital humano empregada no setor de pesquisa e desenvolvimento aumenta com os acréscimos no estoque existente de conhecimento. Isso evidencia o caráter do conhecimento como um bem público no referido setor.

Estrutura do Modelo

- Como no setor em consideração não existem insumos que sejam do domínio exclusivo de alguns indivíduos ou firmas, segue-se que a entrada de novas firma é inteiramente livre.
- Sendo assim, cada firma deverá obter lucro econômico igual a zero.
- Definindo-se $\mathbf{W}_{h}$ como sendo a taxa de remuneração do capital humano nesse setor, a seguinte condição deve prevalecer :
  - $\mathbf{P_A \& A = W_h}$ (8)
- Por fim, o capital humano empregado no setor de produção de bens finais mais o estoque de capital humano empregado no setor de pesquisa e desenvolvimento deve ser igual ao estoque total de capital humano existente na economia. Sendo assim, temos que :
  - $\mathbf{H_A + H_Y = H}$ (9)

Solução do Modelo

- **$g = \{(\& H - \psi\rho) / (1+ \psi\sigma)\}$** (10)

- Na equação (10) fica claro que a taxa de crescimento da renda per-capita, g, é uma função crescente do estoque de capital humano existente nessa economia e uma função inversa da taxa de impaciência inter-temporal (ρ) e da taxa de substituição no consumo (σ).
- Considerando que os países diferem substancialmente entre si no que refere às diversas medidas possíveis do estoque de capital humano (como, por exemplo, o nível médio de escolariedade da população); segue-se que a equação (10) é compatível com a existência de diferentes taxas de crescimento da renda per-capita entre os diversos países do mundo.